1. Aufgabe

Beweisen Sie (sofern nicht schon in der Vorlesung geschehen):

1. $(G, \cdot)$ Gruppe, dann gilt
   a) $(a^{-1})^{-1} = a$
   b) Beweisen Sie: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$
   c) Formulieren Sie die Aussage a) und b) in einer Gruppe $(R, +)$ (Schreibweise erinnern!).
2. $(R, +, \cdot)$ Ring, dann gilt
   a) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
   b) $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$
3. $(K, +, \cdot)$ Körper, dann gilt:
   a) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$
   b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \ b \neq 0, d \neq 0$

Lösungsvorschlag:

1. a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Inverse eines Elementes in einer Gruppe **eindeutig** bestimmt ist. Nun ist

$$\begin{aligned}\left(a^{-1}\right)^{-1} \cdot a^{-1} &= 1 \text{ (Inverses von } a^{-1} \text{ multipliziert mit } a^{-1}\text{ !) und}\\ a \cdot a^{-1} &= 1\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit muss damit gelten: Das (eindeutig bestimmte) Inverse Element zu a^{-1} ist a oder in Formel:

$$a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$$

b) $\left(b^{-1} \cdot a^{-1}\right) \cdot (a \cdot b) = b^{-1} \cdot \left(a^{-1} \cdot (a \cdot b)\right) = b^{-1} \cdot \left(\left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot b\right) = b^{-1} \cdot (e \cdot b) = b^{-1} \cdot b = e$
Also: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

c) Wenn die Verknüpfung in einer Gruppe $+$ lautet, so haben wir abgemacht, dass das Inverse zu a mit $-a$ bezeichnet wird und - Negatives von a - genannt wird. Mit dieser Schreibweise gilt
$-(-a) = a$ (Schulkinder merken sich das so: Minus mal Minus ist Plus ...).
$-(a+b) = (-b)+(-a) =$ (wenn G abelsch!) $= -a-b$ (damit haben Schulkinder auch Probleme - klar, wenn man es nur stumpfsinnig auswendig lernen muss ...)

2. a) $a \cdot b + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0 \Rightarrow -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$

b) Mit analoger Methode wie soeben, zeigt man auch:

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

(denn: $a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot b + (-b)) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$)

Damit wissen wir:

$$\begin{aligned}-(-x) &= x & (1)\\ ab &= (-a) \cdot b & (2)\\ ab &= a \cdot (-b) & (3)\end{aligned}$$

Intelligente Anwendung dieser 3 Regeln:

$$\begin{aligned}a \cdot b = &\quad \text{nach (1)}\\ &= -(-(ab)) \quad \text{nach (2)}\\ &= -((-a)b) \quad \text{nach (3)}\\ &= (-a) \cdot (-b)\end{aligned}$$

3. a) $\Leftarrow$: In Vorlesung gezeigt: Dies gilt sogar in Ringen!
$\Rightarrow$: Sei also $a\,b = 0$. Falls $a = 0$ fertig. Falls $a \neq 0$, dann existiert a^{-1} und $b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$

b) Es ist:

$$(bd) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = (bd) \cdot \frac{a}{b} + (bd) \cdot \frac{c}{d} = \text{(Kommutativges., Def. Inverses ...)} = ad + bc$$

Da $b \neq 0$ und $d \neq 0$ ist auch $bd \neq 0$, also existiert $(bd)^{-1} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

2. Aufgabe

Definition. $n \in \mathbb{N}$. $S_n := S(\{1, 2, ..., n\})$ S_n sind also alle bijektiven Abbildung von $\{1, 2, ..., n\}$ auf sich selbst.

Wir wissen: $(S_n, \circ)$ ist Gruppe mit $n!$ Elementen!

1. Geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass nicht alle Gruppen $(S_n, \circ)$ abelsch (kommutativ) sind.
2. Ist $(S_2, \circ)$ abelsch?

Lösungsvorschlag:

1. Behauptung: $(S_3, \circ)$ ist nicht kommutativ (abelsch).

   Darstellung von S_3

   1,2,3 wird abgebildet auf

   1,2,3 A1 oder

   1,3,2 A2 oder

   2,1,3 A3 oder

   2,3,1 A4 oder

   3,1,2 A5 oder

   3,2,1 A6. (S_3 hat $3! = 6$ Elemente!)

   Nun z.B.: A2∘A3 = A5 aber

   A3∘A2=A4≠A5. also: $A2 \circ A3 \neq A3 \circ A2$ oder σ_3 ist zwar Gruppe, aber nicht abelsch!

2. $(S_2, \circ)$ ist abelsch. $S_2 = \{id, f\}$, mit $f(1) = 2, f(2) = 1$. Man sieht sofort $f \circ id = id \circ f$ ...

3. Aufgabe

Der binomischer Lehrsatz lautet:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Mittlerweile haben Sie algebraische Objekte kennengelernt: Gruppen $(G, \cdot)$, Ringe $(R, +, \cdot)$ und Körper $(K, +, \cdot)$ mit entsprechenden Eigenschaften.

In welchen der angegebenen Objekte gilt der binomische Lehrsatz? Formulierung angeben!

Lösungsvorschlag:
Gilt in kommutativen Ringen mit 1 (und damit natürlich auch in Körpern):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, a, b \in R, n \in \mathbb{N}$$

Genaueres Hinsehen läßt die Frage aufkommen: Was soll eigentlich in einem Ring der Ausdruck

$$\binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in R$$

bedeuten soll?
Klar ist, was a^k, b^{n-k} und damit auch, was $a^k b^{n-k}$ ist (Multiplikation in $R(+,\cdot), a^0 = 1, a^n = a \cdot a^{n-1}$, ...)
Aber dieser Ausdruck mit einer natürlichen Zahl $\binom{n}{k}$ multipliziert ????!!!!
In Vorlesung wurde auch gesagt, was das bedeutet:

$$n \cdot a := \underbrace{a + a + a ... + a}_{n-mal}$$

Damit klar, wie der binomische Lehrsatz zu lesen bzw. anzuwenden ist!

4. Aufgabe

$a, b \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

1. $\overline{\overline{a}} = a$
2. $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
3. $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$
4. $b \neq 0$, dann $\overline{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\overline{b}}$
5. $b \neq 0$, $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$
6. $a + \overline{a} = 2 \cdot Re(a)$
7. $a - \overline{a} = 2 \cdot Im(a) \cdot i$
8. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Lösungsvorschlag:

Sei $a = x + y \cdot i, b = u + v \cdot i$, also $\overline{a} = x - y \cdot i, \overline{b} = u - v \cdot i$ Dann:

1. klar
2. $a \cdot b = (xu - yv) + (xv + yu) \cdot i$
   $\overline{a} \cdot \overline{b} = (xu - yv) - (xv + yu) \cdot i = \overline{a \cdot b}$
3. klar
4. Es gilt $b \cdot \frac{1}{b} = 1$ ($\frac{1}{b}$ ist Inverses von b).
   Dann $\overline{b} \cdot \overline{\frac{1}{b}} = \overline{b \cdot \frac{1}{b}} = \overline{1} = 1$
   Also (genau hinschauen!): Das eindeutig bestimmte Inverse von $\overline{b}$ lautet $\overline{\frac{1}{b}}$!
   Also $\left(\overline{b}\right)^{-1} = \overline{\frac{1}{b}}$. Oder andere Schreibweise $\frac{1}{\overline{b}} = \overline{\frac{1}{b}}$
5. $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \overline{a \cdot \frac{1}{b}} = \overline{a} \cdot \overline{\frac{1}{b}} = \overline{a} \cdot \frac{1}{\overline{b}} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$
6. $a + \overline{a} = 2 \cdot x = 2 \cdot Re(a)$
7. $a - \overline{a} = 2 \cdot y\, i = 2 \cdot Im(a)\, i$
8. Nach Vorlesung: $a \cdot \overline{a} = |a|^2$. Damit
   $|ab|^2 = (ab) \cdot \overline{ab} = ab\overline{a}\overline{b} = |a|^2 \cdot |b|^2 = (|a| \cdot |b|)^2$.
   Da $|...| \geq 0 \Rightarrow |ab| = |a| \cdot |b|$

5. Aufgabe

Rechnen in $\mathbb{C}$: $a := 3 + 4i, b := 2 - 2i, c := 3i, d := 4$

1. Berechne $a + b, a - b, a \cdot b, \frac{a}{b}$
2. Berechne $a \cdot \overline{a}, Re(a), Im(a), |a|$
3. Berechne Lösungen $x \in \mathbb{C}$ mit
$$a \cdot x + c \cdot Re(d) = b$$
4. Berechne Lösungen $x \in \mathbb{C}$ mit
$$a \cdot Re(x) = d$$
5. Zeichne die Lösungen der Gleichung
$$x \cdot \overline{x} = 9$$

Lösungsvorschlag:

1. $5 + 2\,i, 1 + 6\,i, 14 + 2\,i, -1/4 + 7/4\,i$
2. $25, 3, 4, 5$
3. gesucht sind die Lösungen in $x \in \mathbb{C}$ mit
$$a \cdot x + 4 * c = b$$
In Körper darf man wie gewohnt rechnen! Also
$$x = \frac{b - 4 \cdot c}{a} = ... = -2 - 2i$$
4. Frage: Für welche $x \in \mathbb{C}$ gilt
$$Re(x) = \frac{d}{a} = \frac{12}{25} - \frac{16}{25} \cdot i$$
Da $Re(x) \in \mathbb{R}$, gibt es natürlich kein $x \in \mathbb{C}$ dessen Realteil die komplexe Zahl $\frac{12}{25} - \frac{16}{25} \cdot i$ ergibt! (Lösungsmenge ist leer!)
5. $$|x|^2 = x\overline{x} = 9 = 3^2 \Rightarrow |x| = 3$$
Dh.: Lösungsmenge ist Kreis um 0 mit Radius = 3.

6. Aufgabe

1. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten ($a_k \in \mathbb{R}$).

   Zeigen Sie: Wenn $s \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{s}$ eine Nullstelle von p. D.h: komplexe Nullstellen treten bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten immer paarweise konjugiert zueinander auf!

   Lösungsvorschlag:
   $p(s) = 0 \Rightarrow \overline{p(s)} = \overline{0} = 0 \Rightarrow$
   $0 = \overline{p(s)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot s^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \cdot s^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{s}^k = (\text{ da } a_k \in \mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \overline{s}^k = p\left(\overline{s}\right)$
   Also $\overline{s}$ ebenfalls Nullstelle.

2. Wie lauten die Lösungen der (einfachen) quadratischen Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

   Lösungsvorschlag:
   Es gilt: $i^2 = -1$. Also eine Lösung lautet i. Soeben gesehen, das auch $\bar{i} = -i$ eine Lösung sein muss!. Polynom vom grad 2 hat aber (höchstens) 2 Nullstellen. Alle gefunden: $\{i, -i\}$

3. In manchen Büchern findet man die seltsame Schreibweise

$$i = \sqrt{-1}$$

   Begründen Sie die Intention dieser Schreibweise

   Lösungsvorschlag:
   Wir wissen, dass i Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ ist. In der normalen Schreibweise ist der Ausdruck $\sqrt{a}$ nur vernünftig, wenn $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$. D.h. Normalerweise hat die Gleichung $x^2 = a$ für $a \geq 0$ eine Lösung $\sqrt{a}$ (die andere lautet dann $-\sqrt{a}$).
   Diese Lesart wurde bei der Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ einfach auf die Gleichung $x^2 = -1$ übernommen ... Dann sind $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ die Lösungen von $x^2 = -1$ (oder eben $i, -i$):

4. Entwickeln Sie eine allgemein gültige Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

in $\mathbb{C}$.

Hinweis: Quadratische Ergänzung

Lösungsvorschlag:
Es ist
$$ax^2+bx+c = a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\cdot x^2+px+q\right)$$
mit $p := \frac{b}{a}, q := \frac{c}{a}$.
Selbstverstdändlich gilt: Nullstellen von ax^2+bx+c sind die gleichen Nullstellen wie die von x^2+px+q (klar).
Bestimme nun die Lösungen von $x^2+px+q=0$:
Es gilt: $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (q-\frac{p^2}{4})$ (= Binomischer Lehrsatz oder quadr. Ergänzung).
Damit
$$x^2+px+q=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4}-q\right)$$
Nun betrachte 2 Fälle:

a) Fall: $\left(\frac{p^2}{4}-q\right) \geq 0$

Dann $\left(x_{1,2}+\frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ oder
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$
(Das ist die jedem Schüler bekannte Formel zur Lösung von quadr. Gleichungen!)

b) (interessanter) Fall: $\left(\frac{p^2}{4}-q\right) < 0$

Forme die Gleichung folgendermassen um:
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = -\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\cdot(-1)$$
Beachte: Nun ist $-\left(\frac{p^2}{4}-q\right) > 0$ und damit $\sqrt{-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}$ wohldefiniert!

Die Gleichung kann man somit auch schreiben in der Form:
$$\left(\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}}\right)^2 = -1$$
Sieht vielleicht wild aus - aber nun kann man die gewünschte Frage einfach beantworten:

Frage lautet: Welche Zahlen zum Quadrat ergeben die rechte Seite -1 ?

Antwort: $\pm i$. Also
$$\frac{\left(x_{1,2}+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}} = \pm i$$
Nun noch auflösen:

Lösungsvorschlag:
(... Fortsetzung)
Zusammenfasung:
Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$ lauten:

$$x_{1,2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \geq 0 \\ -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{p^2}{4} - q\right)} \cdot i & \text{falls } \left(\frac{p^2}{4} - q\right) < 0 \end{cases}$$

Man sieht sehr schön, das komplexe Lösungen immer konjugiert komplex auftreten - sofern die Koeffizienten des Polynomes aus $\mathbb{R}$ sind - gell!
Wenn man sich nun zu der eigentlichen falschen Definition

$$\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{a} \text{ wie gehabt} & \text{für } a \geq 0 \\ \sqrt{-a} \cdot i & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

entschliesen kann, dann lässt sich die obige Formel kürzer schreiben:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Oder wie in vielen Büchern angegeben:
Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

mit $p := \frac{b}{a}$, $q := \frac{c}{a}$

5. Berechnen Sie die Lösungen in $\mathbb{C}$ von

$$-3\,x^2 + 12\,x - 87$$

Lösungsvorschlag:
$x_{1,2} = 2 \pm 5i$

6. Berechnen Sie die Lösungen in $\mathbb{C}$ von

$$-3\,x^2 + 54\,x - 243$$

Lösungsvorschlag:
$x_{1,2} = 9$ (doppelte Nullstelle)

7. Berechnen Sie die Lösungen in $\mathbb{C}$ von

$$2\,x^2 - 10\,x + 12$$

Lösungsvorschlag:
$x_1 = 2$ $x_2 = 3$