1. Aufgabe

Beweisen Sie (sofern nicht schon in der Vorlesung geschehen):

1. $(G, \cdot)$ Gruppe, dann gilt
   a) $(a^{-1})^{-1} = a$
   b) Beweisen Sie: $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$
   c) Formulieren Sie die Aussage a) und b) in einer Gruppe $(R, +)$ (Schreibweise erinnern!).
2. $(R, +, \cdot)$ Ring, dann gilt
   a) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
   b) $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$
3. $(K, +, \cdot)$ Körper, dann gilt:
   a) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$
   b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \ b \neq 0, d \neq 0$

2. Aufgabe

Definition. $n \in \mathbb{N}$. $S_n := S(\{1, 2, ..., n\})$ S_n sind also alle bijektiven Abbildung von $\{1, 2, ..., n\}$ auf sich selbst.

Wir wissen: $(S_n, \circ)$ ist Gruppe mit $n!$ Elementen!

1. Geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass nicht alle Gruppen $(S_n, \circ)$ abelsch (kommutativ) sind.
2. Ist $(S_2, \circ)$ abelsch?

3. Aufgabe

Der binomischer Lehrsatz lautet:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Mittlerweile haben Sie algebraische Objekte kennengelernt: Gruppen $(G, \cdot)$, Ringe $(R, +, \cdot)$ und Körper $(K, +, \cdot)$ mit entsprechenden Eigenschaften.
In welchen der angegebenen Objekte gilt der binomische Lehrsatz? Formulierung angeben!

4. Aufgabe

$a, b \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

1. $\overline{\overline{a}} = a$
2. $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
3. $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$
4. $b \neq 0$, dann $\overline{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\overline{b}}$
5. $b \neq 0$, $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$
6. $a + \overline{a} = 2 \cdot Re(a)$
7. $a - \overline{a} = 2 \cdot Im(a) \cdot i$
8. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

5. Aufgabe

Rechnen in $\mathbb{C}$: $a := 3 + 4i, b := 2 - 2i, c := 3i, d := 4$

1. Berechne $a + b, a - b, a \cdot b, \frac{a}{b}$
2. Berechne $a \cdot \overline{a}, Re(a), Im(a), |a|$
3. Berechne Lösungen $x \in \mathbb{C}$ mit
$$a \cdot x + c \cdot Re(d) = b$$
4. Berechne Lösungen $x \in \mathbb{C}$ mit
$$a \cdot Re(x) = d$$
5. Zeichne die Lösungen der Gleichung
$$x \cdot \overline{x} = 9$$

6 . Aufgabe

1. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten ($a_k \in \mathbb{R}$).

   Zeigen Sie: Wenn $s \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{s}$ eine Nullstelle von p. D.h: komplexe Nullstellen treten bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten immer paarweise konjugiert zueinander auf!

2. Wie lauten die Lösungen der (einfachen) quadratischen Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

3. In manchen Büchern findet man die seltsame Schreibweise

$$i = \sqrt{-1}$$

   Begründen Sie die Intention dieser Schreibweise

4. Entwickeln Sie eine allgemein gültige Formel zur Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

   in $\mathbb{C}$.

   Hinweis: Quadratische Ergänzung

5. Berechnen Sie die Lösungen in $\mathbb{C}$ von

$$-3\,x^2 + 12\,x - 87$$

6. Berechnen Sie die Lösungen in $\mathbb{C}$ von

$$-3\,x^2 + 54\,x - 243$$

7. Berechnen Sie die Lösungen in $\mathbb{C}$ von

$$2\,x^2 - 10\,x + 12$$