1. Aufgabe

1. A, B, C seien Mengen.

   Beweisen Sie die Formel

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2. A := { ∘, +, - }, B := { x, ∘}

   Geben Sie $A \times B$, $B \times A$ und $P(A)$ an.

3. Geben Sie $P(\{\,\}), P(P(\{\,\}))$ sowie $P(P(P(\{\,\})))$ an.

Lösungsvorschlag:

1. klar, analog Vorlesung!
2. klar
3. a) $P(\{\,\}) = \{\{\,\}\}$ (enthält genau ein Element - die leeren Menge!)
   b) $P(P(\{\,\})) = \{\{\{\,\}\}, \{\,\}\}$ (enthält genau 2 Elemente!)
   c) $P(P(P(\{\,\}))) = \{\{\{\{\,\}\}, \{\,\}\}, \{\,\}, \{\{\,\}\}, \{\{\{\,\}\}\}\}$ (enthält genau 4 Elemente!) (hier entsteht ... !)

2. Aufgabe

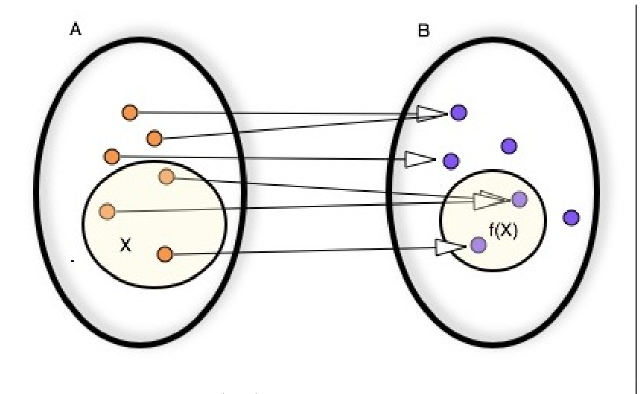
Erinnerung an Bild und Urbild einer Abbidlung $f : A \longrightarrow B$:
Definition. Sei

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

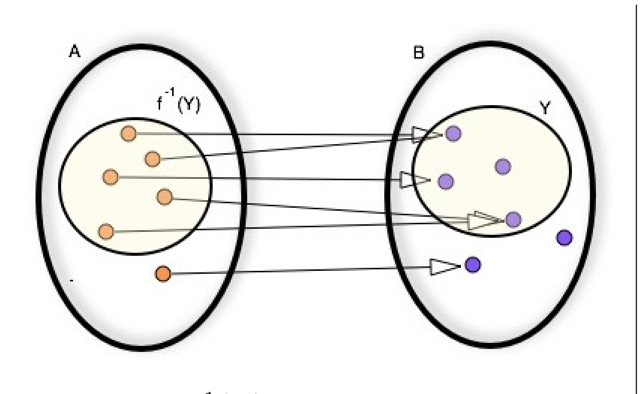
eine Abbildung und $U \subset A$ sowie $V \subset B$. Dann ist

1. $f(U) := \{f(x)\,|x \in U\}$. Man nennt $f(U)$ das **Bild** von U unter f
2. $f^{-1}(V) := \{x \in A\,|f(x) \in V\}$. Man nennt $f^{-1}(V)$ das **UrBild** von V unter f

Machen Sie sich klar, dass folgende zwei Bilder die beiden Definitionen beschreiben:



$f(X)$, Bild von X



$f^{-1}(Y)$, Urbild von Y

Geben Sie jeweils an, was richtig bzw. falsch ist.

1. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

   Die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ ist definiert durch

   - ☐ $x \mapsto g(f(x))$
   - ☐ $x \mapsto g(x)f(x)$
   - ☐ $x \mapsto f(g(x))$

2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

   ist bijektiv.

   Die Umkehrabbildung ist definiert durch

   - ☐ $x \mapsto \frac{1}{x}$
   - ☐ $x \mapsto x$
   - ☐ $x \mapsto -x$
   - ☐ $x \mapsto -\frac{1}{x}$

3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist

   - ☐ surjektiv, aber nicht injektiv,
   - ☐ injektiv, aber nicht surjektiv,
   - ☐ weder surjektiv noch injektiv

4. Zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b, c) &\mapsto a^n + b^n - c^n \end{aligned}$$

Frage: gilt

☐ $F^{-1}(0) = \{\,\}$
☐ $F^{-1}(0) \neq \{\,\}$
☐ F ist injektiv?

Achtung: dies ist eine Frage, die ungemein schwer zu beweisen ist! - siehe und verstehe, was das mit der Aufgabe zu tun hat: `http://de.wikipedia.org/wiki/Großer_fermatscher_Satz`

Lösungsvorschlag:

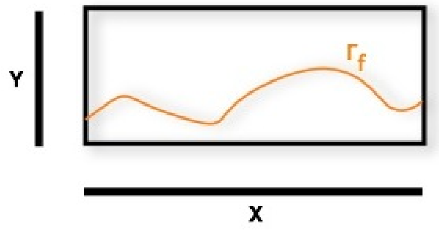
1. 1. Kästchen richtig ander falch.
2. 1. Kästchen richtig
3. 3. Kästchen richtig sonst falsch (-3 hat z.B.: kein Urbild, -2,2 wird auf 4 abgebildet ...)
4. Nicht injektiv, da z.B.: $(1, 2, 3)$ auf das gleiche abgebildet wird wie $(2, 1, 3)$

   Nach dem berühmten Fermat'schen Satz gibt es keine 3 Zahlen (a, b, c) mit der Eigenschaft $a^n + b^n = c^n$. Also hat bei obiger Abbildung die 0 kein Urbild! Also: $F^{-1}(0) = \{\,\}$ Das bedeutet auch, daß F nicht surjektiv ist.

   Die Beantwortung des Fermat'schen Satzes ist erst 1994 dem engl. Mathematiker Andrew Wiles gelungen (und äußerst, äußerst schwierig).

3. Aufgabe

Überlegen Sie, dass folgende Skizze einen Graph Γ_f einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ darstellt, welche weder surjektiv noch injektiv ist:



Zeichnen Sie in der soeben beschriebenen Weise jeweils Graphen von Abbildungen f mit folgenden Eigenschaften:

1. f surjektiv, aber nicht injektiv
2. f injektiv, aber nicht surjektiv
3. f bijektiv
4. f konstant (d.h.: $f(x) = c \quad \forall x \in X$ mit $c \in Y$)
5. f weder surjektiv noch injektiv
6. X = Y und $f = id_X$
7. f(X) besteht aus genau 2 Elementen
8. $|f^{-1}(Y)| = 4$

Lösungsvorschlag:
klar!

4. Aufgabe

Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, dann:

1. f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$.
2. f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung $h : B \longrightarrow A$ mit $h \circ f = id_A$.
3. f ist bijektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung $k : B \longrightarrow A$ mit $k \circ f = id_A$ und $f \circ k = id_B$.

Bem: Falls f bijektiv, dann ist die Abbildung k eindeutig bestimmt und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Lösungsvorschlag:

1. "⇒" (Zeige: f ist surjektiv ⇒ Es ex. g mit .. .).

   Sei also $f : A \to B$ sujektiv.

   Suche/Konstruiere also Abbildung $g : B \to A$ so daß $f \circ g = id_B$

   Hierzu: Zu $y \in B$ ist $f^{-1}(y) \neq \{ \}$ (da f nach Voraussetzung sujektiv).

   Wähle nun ein beliebiges aber festes Element $x \in f^{-1}(y)$ aus und definiere

   $$g(y) := x$$

   .

   Mit dieser so definierten Abbildung $g : B \to A$ gilt nun:

   $$f \circ g(y) = f(g(y)) = y = id_B(y) \quad \forall y \in B$$

   Also $f \circ g = id_B$.

   "⇐" (Zeige: Es ex. g mit ... ⇒ f ist surjektiv)

   Sei $y \in B$. Dann defniere $x := g(y) \in X$. Nun gilt: $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = id_B(y) = y$. D.h.: Zu (jedem) Element y gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. D.h: $B = f(X)$ oder - f ist surjektiv -.

2. "⇒" (Zeige: f ist injektiv ⇒ Es ex. h mit ...).

   Sei also $f : A \to B$ injektiv.

   Suche/Konstruiere also Abbildung $h : B \to A$ so daß $h \circ f = id_A$

   Konstruiere h folgendermassen: Sei $y \in B$, dann gilt $f^{-1}(y)$ enthält genau ein Element oder keines! (da ja f nach Voraussetzung injektiv ist!) . Es gibt also zwei Fälle für $f^{-1}(y)$!

   Falls f^{-1} genau ein Element x enthält (also $f^{-1} = \{x\}$, definiere $h(y) := x$.

   Ansonsten, falls $f^{-1} = \{ \}$, wähle ein beliebiges Element $x \in A$ und definiere $h(y) := x$.

   Mit dieser so definierten Abbildung $h : B \to A$ gilt nun:

   $$h \circ f(x) = h(f(x)) = x = id_A(x) \quad \forall x \in A$$

   also $h \circ f = id_A$.

   "⇐" (Zeige: Es ex. h mit ... ⇒ f ist injektiv).

   Sei also eine Abb. $h : B \to A$ mit $h \circ f = id_X$ gegeben mit $h \circ f = id_A$.

   Zeige, daß dann $f$injektiv ist:

   Hierzu: Sei $f(x) = f(y)$. Dann

   $$x = id_A(x) = h \circ f(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = h \circ f(y) = id_A(y) = y$$

   also f injektiv.

Lösungsvorschlag:
3.

"$\Leftarrow$" Sei also die rechte Seite vorausgesetzt. dann ist nach 1. f surjektiv und nach 2. f injektiv, also f bijektiv.

"$\Rightarrow$" Man sieht sofort, dass die beiden unter 1. und 2. konstruierten Abbildungen g bzw. h gleich sind (da f surjektiv und injektiv, enthält $f^{-1}(y)$ genau ein Element!). Also $g = h$ und die beiden Bedingungen erfüllt sind.

5. Aufgabe

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3} \cdot x - 4 \end{array}$$

bijektiv ist

Lösungsvorschlag:
Lösungsvorschlag:
Für die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 3 \cdot (t + 4) \end{array}$$

gilt:

1. $k \circ f(x) = k(f(x)) = k\left(\frac{1}{3} \cdot x - 4\right) = 3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \cdot x - 4\right) + 4\right) = x = id_{\mathbb{R}}(x)$ Also $k \circ f = id_{\mathbb{R}}$
   und
2. $f \circ k(y) = f(k(y)) = f(3 \cdot (y + 4)) = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot (y + 4)) - 4 = (y + 4) - 4 = y = id_{\mathbb{R}}(y)$ also $f \circ k = id_{\mathbb{R}}$.

Nach obigem Satz (3) ist also f bijektiv! Desweiteren lautet die (eindeutig bestimmte) Umkehrabbildung von f: $f^{-1} = k$.

6 . Aufgabe

Eine Menge A bestehe aus 3 Elementen und eine Menge B bestehe aus 4 Elementen.

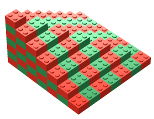
1. Wieviele verschiedene Abbildungen von A nach B gibt es?
2. Wieviele verschiedene injektive Abbildungen von A nach B gibt es?
3. Wieviele verschiedene surjektive Abbildungen von A nach B gibt es?
4. Wieviele verschiedene bijektive Abbildungen von A nach B gibt es?

Lösungsvorschlag:
Benutze Formeln der Vorlesung!

1. $|B|^{|A|} = 4^3 = 64$ Abbildungen
2. $3! \cdot \binom{4}{3} = 6 \cdot 4 = 24$ surjektive Abbildungen
3. Keine, denn hierzu müsste $|A| \geq |B|$ sein!
4. Keine, da es auch keine injektiven Abbildungen gibt!

7 . Aufgabe

1. Hier eine Legopyramide mit quadratischer Grundfläche der Länge und Breite = 7 Steine (Höhe ist ebenfalls 7 Einheiten).



Es ist klar: Um dieses Gebilde zu bauen, braucht man

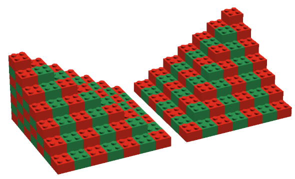
$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$$

Steine!

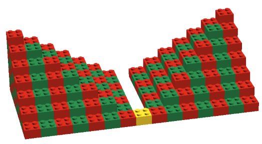
Es soll nun eine Formel entwickelt und bewiesen werden, welche zu vorgegebenem n (= Länge der Grundfläche = Breite der Grundfläche = Höhe der Pyramide) die Anzahl $S(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^n$ der benötigten Steine berechnet ($S(7) = 140$).

Zur Entwicklung einer entsprechenden Formel, betrachten Sie folgende Konstruktion/Legospielerei:

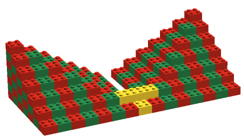
a) Anzahl Steine des folgenden Gebildes: $2 \cdot S(7)$ (klar)



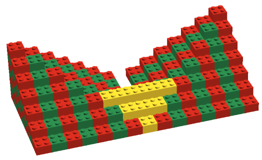
b) einen (gelben) Stein hinzufügen:



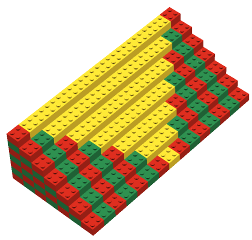
c) weitere 4 (gelbe) Steine hinzufügen:



d) weitere 9 (gelbe) Steine hinzufügen:



e) usw., ... bis folgendes Gebilde erzeugt ist:



f) Überzeugen Sie sich, dass damit insgesamt $3 \cdot S(7)$ Steine verbaut sind!

g) Welche Länge hat dieses Gebilde?

h) Betrachten Sie die Längen und summieren sie alle diese Reihen auf.

i) Sie sollten folgenden Zusammenhang erhalten:

$$3 \cdot S(7) = \frac{7 \cdot (7+1)}{2} \cdot (2 \cdot 7 + 1)$$

und daraus

$$S(7) = \frac{7 \cdot (7+1) \cdot (2 \cdot 7 + 1)}{6}$$

2. Versuchen Sie nun obige Legospielerei zu verallgemeinern (beliebiges $n \in \mathbb{N}$) und beweisen sie die von Ihnen vermutete Formel für $S(n)$.

3. Wieviele Steine sind für eine Pyramide mit Seitenlänge 50 nötig?

Lösungsvorschlag:

1. Die Anzahl der gelben Steine, welche in jeder Reihe hinzugefügt werden sind:

$$1^2, 2^2, 3^2, ..., 7^2$$

Also: Anzahl gelbe Steine $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 7^2 =$ genausoviele, wie die Originalpyramide enthält.

Also sind insgesamt $3 \cdot S(7)$ Steine verbaut.

Die Länge des Gebildes $= 7 + 1 + 7 = 2 \cdot 7 + 1$ - klar, betrachte die unterste Reihe!

Also: Eine Reihe enthält $2 \cdot 7 + 1$ Steine. Summiere nun alle Reihen auf: (unterste Stufe + 2*2.Stufe + 3*3.Stufe + ... + 7*oberste Stufe)

$1 \cdot (2 \cdot 7 + 1) + 2 \cdot (2 \cdot 7 + 1) + 3 \cdot (2 \cdot 7 + 1) + ... + 7 \cdot (2 \cdot 7 + 1) = (1 + 2 + 3 + ...7) \cdot (2 \cdot 7 + 1) =$

$$\frac{7 \cdot (7-1)}{2} \cdot (2 \cdot 7 + 1)$$

Hier wurde der das Ergebnis aus der Vorlesung benutzt:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Nun gilt:

$$3 \cdot S(7) = \frac{7 \cdot (7+1)}{2} \cdot (2 \cdot 7 + 1)$$

oder

$$S(7) = \frac{7 \cdot (7+1) \cdot (2 \;\cdot 7 + 1)}{6}$$

2.

Satz 7.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $S(n) := 1^2 + 2^2 + ... + n^2$:

$$S(n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \;\cdot n + 1)}{6}$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Behauptung ist wahr für $n = 1$, denn: $S(1) = 1$ und $\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \;\cdot 1 + 1)}{6} = 1$

Induktionsschluss: Behauptung sei wahr für n. Zeige, daß sie dann auch für $n + 1$ wahr ist:

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \;\cdot n + 1)}{6} + (n^2 + 2\,n + 1) = ... =$$

$$= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2 \;\cdot (n+1) + 1)}{6}$$

Lösungsvorschlag:
3.

$$S(50) = \frac{50 \cdot (50+1) \cdot (2 \ \cdot 50+1)}{6} = 42925$$

8. Aufgabe

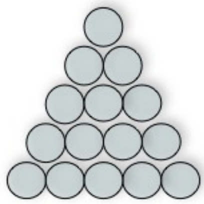
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$.

Zeigen Sie, dass zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ aus $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind.

Lösungsvorschlag:
Konstruiere bijektive Abbildung $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$:
Behauptung: $x \mapsto \frac{d-c}{b-a} \cdot (x - a) + c$ tuts.
Umkehrabbildung lautet $f^{-1}(x) = \frac{b-a}{d-c} \cdot (x - c) + a$
Dann - wie man leicht nachrechnet:$g \circ f = id|_{[a,b]}$ und $f \circ g = id|_{[c,d]}$

9. Aufgabe

Ein Trinker bekommt eine Lieferung von 1000 Weinflaschen. Da er auch eine gewisse Ästhetik besitzt, will er die Flaschen in Form einer Pyramide aufbauen. Beispiel mit 15 Flaschen:



Wieviele Flaschen muß er noch hinzukaufen, damit eine perfekte Pyramide entsteht und wieviele Flaschen muss er in die unterste Reihe legen?

Lösungsvorschlag:
Eine Pyramide mit n Flaschen am Boden besteht aus

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Flaschen (siehe Formel in Vorlesung!)
Nun: Schätze z.B. ab:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1000 \text{ also: } n_1 = -1/2 + 3/2\,\sqrt{889}, n_2 = -1/2 - 3/2\,\sqrt{889}$$

$$\text{oder } n_1 \approx 44.22415454, n_2 \approx -45.22415454$$

Nun:

n Flaschen in der Bodenreihe	$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ Flaschen für Pyramide
44	990
45	1035

Er sollte also noch 35 Flaschen hinzukaufen, und am Boden 45 Flaschen aneineanderlegen.

10. Aufgabe

Betrachte folgendes Programmkonstrukt:

```
int n = 2000;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
       for (j = 0; j < i; j++) {
```

```
4                   // wilde Rechnerei
5           }
6       }
```

Wir nehmen einfach an, dass zur Ausführung der Zeile 4 genau 10^{-3} sec benötigt werden und die anderen Programmzeilen vernachlässigbar sind.

Wie lange dauert die Durchführung des Programmsegmentes?

Lösungsvorschlag:

Zähle, wie oft Zeile 4 abgearbeitet wird:

Werte von i	Werte von j	Anzahl der Ausführungen von Zeile 4
0	-	0
1	0...0	1
2	0...1	2
...	...	...
k	0...k-1	k
...	...	...
n-1	0..n-2	n-1

Also insgesamt für $n = 2000$:

$$1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 1999 \text{ sec } \approx 33 \text{ min}$$

11. Aufgabe

1. Sehen Sie ruhig mal unter wikipedia nach, wie dort die Fakultät ($n!$) eingeführt wurde.

   Beurteilen Sie diese Art der Einführung.

Lösungsvorschlag:

Man stellt fest, dass der Schreiber wahrscheinlich auch nicht den großen Durchblick hatte! Dort wird wieder zuerst eine Abkürzung definiert! Anstatt dass man konkret eine Bedeutung für das Symbol angibt - nämlich die Anzahl der bijektiven Abbildungen!

Erst anschliessend wird eine Bedeutung angegeben ... - aber natürlich nichts bewiesen ...

Also: Vorsicht vor Wikipedia !!!

2. Anbei zwei Formeln zur Abschätzung von $n!$

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} - \frac{139}{5140\,n^3}\right)$$

Wie man auf solche Formeln kommt, sei momentan dahingestellt.

Überprüfen Sie die Güte durch entsprechende Experimente mit Taschenrechner oder Computer!

Lösungsvorschlag:

n	n!	$\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$	2. Formel
1	1	.9221370088	.9772464560
2	2	1.919004352	1.994141762
5	120	118.0191680	119.9770132
10	3628800	$3.598695624 * 10^6$	$3.628712391 * 10^6$
20	2432902008176640000	$2.422786855 * 10^18$	$2.432894642 * 10^18$
30	siehe unten!	$2.645170972 * 10^32$	$2.652526224 * 10^32$
70	siehe unten!	$1.196432019 * 10^100$	$1.197857096 * 10^100$

```
30! = 265252859812191058636308480000000
70! = 11978571669969891796072783721689098736458938142546425...
        ... 8575553628646280095827898453196800000000000000000
```

maple - Code:

```
n:=20;
[n, n!, evalf(sqrt(2*Pi*n)*(n/exp(1))^n),
  evalf(sqrt(2*Pi*n)*(n/exp(1))^n*(1+1/(12*n)+1/(288*n*n) - 139/(5140*n*n*n))  )  ];
```

12. Aufgabe

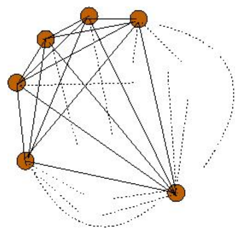
Berechne

1. $\binom{17}{4}$
2. $\binom{17}{13}$
3. $\binom{5}{3}$ aus Pascalschem Dreieck
4. $(a+b)^5$ als Summe von Binomen ausdrücken!
5. Zeigen Sie: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$$

6. Entwickeln Sie nach dem Vorbild des Pascalschen Dreieckes ein analoges Schema für die Stirlingzahlen $S_{n,k}$
7. Berechne $S_{8,3}$
8. Ein Gärtner hat 30 Pflöcke kreisförmig in die Erde gesteckt und jeden Pflock mit jedem anderen mit einer Schnur verbunden. Wieviele Seilstücke hat er benötigt?

   Versuch einer Graphik:



9. M sei Menge mit 5 Elementen. Wieviel verschiedene Zerlegungen von M gibt es?

Lösungsvorschlag:

1. $\binom{17}{4} = 2380$
2. $\binom{17}{13} = \binom{17}{17-4} = \binom{17}{4} = 2380$
3. $\binom{5}{3} = ... = 10$ aus Pascalschem Dreieck
4. $(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5$ Koeffiezienten aus Pasc. Dreieck lesen ....
5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt
$$0 = 0^n = (1-1)^n = \text{ Bin.Ls. hinschreiben! } = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \dots (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$$
6. Aus Vorlesung ist eine Rekursionsformel für die Stirlingschen Zahlen bekannt - und zwar gilt:
$$S_{n,k} = \begin{cases} 1 & k = 1 \text{ oder } n = k \\ 0 & k = 0 \text{ oder } n = 0 \\ S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} & \text{sonst} \end{cases}$$
Damit folgendes Schema:
```
S(0, 0) = 1
S(1, 0) = 0 S(1, 1) = 1
S(2, 0) = 0 S(2, 1) = 1 S(2, 2) = 1
S(3, 0) = 0 S(3, 1) = 1 S(3, 2) = 3    S(3, 3) = 1
S(4, 0) = 0 S(4, 1) = 1 S(4, 2) = 7    S(4, 3) = 6    S(4, 4) = 1
S(5, 0) = 0 S(5, 1) = 1 S(5, 2) = 15   S(5, 3) = 25   S(5, 4) = 10   S(5, 5) = 1
S(6, 0) = 0 S(6, 1) = 1 S(6, 2) = 31   S(6, 3) = 90   S(6, 4) = 65   S(6, 5) = 15   S(6, 6) = 1
S(7, 0) = 0 S(7, 1) = 1 S(7, 2) = 63   S(7, 3) = 301  S(7, 4) = 350  S(7, 5) = 140  S(7, 6) = 21   S(7, 7) = 1
S(8, 0) = 0 S(8, 1) = 1 S(8, 2) = 127  S(8, 3) = 966  S(8, 4) = 1701 S(8, 5) = 1050 S(8, 6) = 266  S(8, 7) = 28   S(8, 8) = 1
```
Hier eine Implementierung in Java - aber analog in C oder C++:
```
public static long stirling( long n, long k) {
      if (k == 1 || n == k) return 1;
            if (k == 0 || n == 0) return 0;
                  return ( stirling(n-1,k-1) + k*stirling(n-1,k) );
            }
      }
}
```
7. $S_{8,3} = 966$
8. Soviele Teilstücke, wie man Teilmengen von 2 Stöcken aus 30 Stöcken bilden kann! Denn jedes mögliche Seilstück ist genau durch solch eine Teilmenge beschrieben! Also
$$\binom{30}{2} = 435 \text{ Seilstücke}$$
9. M Menge mit 5 Elementen, dann gibt es
$$\sum_{k=0}^{5} S_{n,k}$$
Zerlegungen dieser Menge.
Also insgesamt $1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$ Arten, M zu zerlegen.

13. Aufgabe

Zeigen Sie:

1.
$$n! \cdot \binom{r}{n} \leq r^n \quad \forall n, k \text{ mit } n \leq r$$

2.
$$r! \cdot S_{n,r} \leq r^n \quad \forall n, k \text{ mit } n \geq n$$

Lösungsvorschlag:

1. Für (beliebiges) n, r gibt es r^n verschiedene Abbildungen $f : N \longrightarrow R$ mit $|N| = n, |R| = r$.

   Weitherhin wissen wir: Wenn $n \leq r$ dann gibt es $\binom{r}{n} \cdot n!$ injektive Abbildungen.

   Damit Aussage klar: Es gibt höchstens so viele injektive Abbildungen wie es insgesamt mögliche Abbildungen gibt!

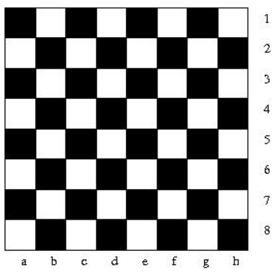
2. Nach Vorlesung gibt es $r! \cdot S_{n,r}$ surjektive Abblidungen ...

14. Aufgabe

1. Beweisen sie (sofern noch nicht geschehen) die wichtige (!!) geometrische Summenformel:

   Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ gilt:
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$
   (nicht mehr vergessen!)

2. Für alle, die es nicht wissen: Ein Schachbrett besteht aus 8x8 Feldern:



a) Auf a1 liegt ein Reiskorn, auf a2 liegen 2 Reiskörner ... auf b1 liegen 9 Reiskörner ...
Wieviel Reiskörner liegen auf dem Brett?

Lösungsvorschlag:
$1 + 2 + 3 + ... + 64 = \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080$

b) Auf a1 liegt ein Reiskorn. Jedes folgende Feld erhält doppelt soviele Reiskörner wie das vorhergehende. (Zeilenweise ...)
Wieviel Reiskörner liegen auf dem Brett?

Lösungsvorschlag:
$2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{64-1} = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615 =$ viel