1. Aufgabe

1. A, B, C seien Mengen.

   Beweisen Sie die Formel

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2. A := { ∘, +, - }, B := { x, ∘}

   Geben Sie $A \times B$, $B \times A$ und $P(A)$ an.

3. Geben Sie $P(\{\,\}), P(P(\{\,\}))$ sowie $P(P(P(\{\,\})))$ an.

2. Aufgabe

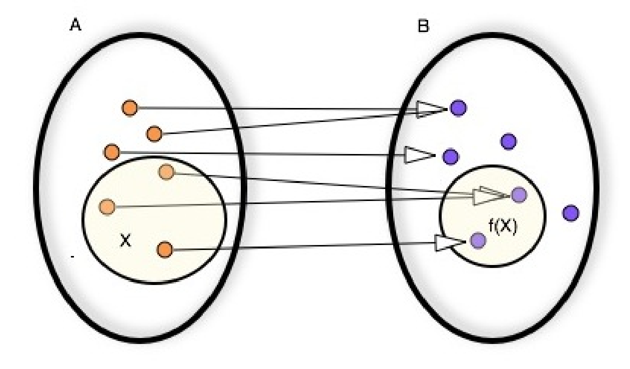
Erinnerung an Bild und Urbild einer Abbidlung $f : A \longrightarrow B$:
Definition. Sei

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

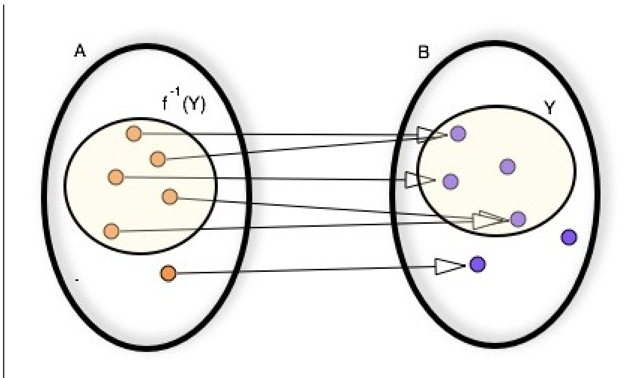
eine Abbildung und $U \subset A$ sowie $V \subset B$. Dann ist

1. $f(U) := \{f(x)\,|x \in U\}$. Man nennt $f(U)$ das **Bild** von U unter f
2. $f^{-1}(V) := \{x \in A\,|\,f(x) \in V\}$. Man nennt $f^{-1}(V)$ das **UrBild** von V unter f

Machen Sie sich klar, dass folgende zwei Bilder die beiden Definitionen beschreiben:



$f(X)$, Bild von X



$f^{-1}(Y)$, Urbild von Y

Geben Sie jeweils an, was richtig bzw. falsch ist.

1. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

   Die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ ist definiert durch

   - ☐ $x \mapsto g(f(x))$
   - ☐ $x \mapsto g(x)f(x)$
   - ☐ $x \mapsto f(g(x))$

2. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

   ist bijektiv.

   Die Umkehrabbildung ist definiert durch

   - ☐ $x \mapsto \frac{1}{x}$
   - ☐ $x \mapsto x$
   - ☐ $x \mapsto -x$
   - ☐ $x \mapsto -\frac{1}{x}$

3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist

   - ☐ surjektiv, aber nicht injektiv,
   - ☐ injektiv, aber nicht surjektiv,
   - ☐ weder surjektiv noch injektiv

4. Zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ (a, b, c) & \mapsto & a^n + b^n - c^n \end{array}$$

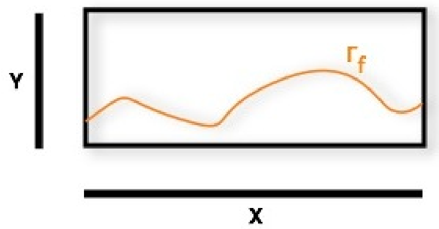
   Frage: gilt

   - ☐ $F^{-1}(0) = \{\,\}$
   - ☐ $F^{-1}(0) \neq \{\,\}$
   - ☐ F ist injektiv?

   Achtung: dies ist eine Frage, die ungemein schwer zu beweisen ist! - siehe und verstehe, was das mit der Aufgabe zu tun hat:
   `http://de.wikipedia.org/wiki/Großer_fermatscher_Satz`

3. Aufgabe

Überlegen Sie, dass folgende Skizze einen Graph Γ_f einer Abbildung $f : X \to Y$ darstellt, welche weder surjektiv noch injektiv ist:



Zeichnen Sie in der soeben beschriebenen Weise jeweils Graphen von Abbildungen f mit folgenden Eigenschaften:

1. f surjektiv, aber nicht injektiv
2. f injektiv, aber nicht surjektiv
3. f bijektiv
4. f konstant (d.h.: $f(x) = c \quad \forall x \in X$ mit $c \in Y$)
5. f weder surjektiv noch injektiv
6. X = Y und $f = id_X$
7. f(X) besteht aus genau 2 Elementen
8. $|f^{-1}(Y)| = 4$

4. Aufgabe

Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, dann:

1. f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$.
2. f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung $h : B \longrightarrow A$ mit $h \circ f = id_A$.
3. f ist bijektiv $\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Abbildung $k : B \longrightarrow A$ mit $k \circ f = id_A$ und $f \circ k = id_B$.

Bem: Falls f bijektiv, dann ist die Abbildung k eindeutig bestimmt und wird mit f^{-1} bezeichnet.

5. Aufgabe

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}\cdot x - 4 \end{array}$$

bijektiv ist

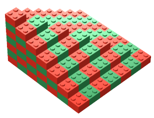
6. Aufgabe

Eine Menge A bestehe aus 3 Elementen und eine Menge B bestehe aus 4 Elementen.

1. Wieviele verschiedene Abbildungen von A nach B gibt es?
2. Wieviele verschiedene injektive Abbildungen von A nach B gibt es?
3. Wieviele verschiedene surjektive Abbildungen von A nach B gibt es?
4. Wieviele verschiedene bijektive Abbildungen von A nach B gibt es?

7. Aufgabe

1. Hier eine Legopyramide mit quadratischer Grundfläche der Länge und Breite = 7 Steine (Höhe ist ebenfalls 7 Einheiten).



Es ist klar: Um dieses Gebilde zu bauen, braucht man

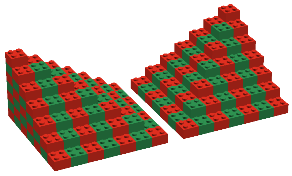
$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$$

Steine!

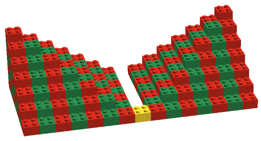
Es soll nun eine Formel entwickelt und bewiesen werden, welche zu vorgegebenem n (= Länge der Grundfläche = Breite der Grundfläche = Höhe der Pyramide) die Anzahl $S(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^n$ der benötigten Steine berechnet ($S(7) = 140$).

Zur Entwicklung einer entsprechenden Formel, betrachten Sie folgende Konstruktion/Legospielerei:

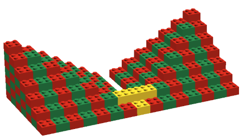
a) Anzahl Steine des folgenden Gebildes: $2 \cdot S(7)$ (klar)



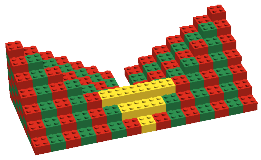
b) einen (gelben) Stein hinzufügen:



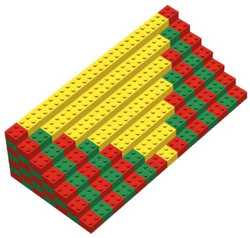
c) weitere 4 (gelbe) Steine hinzufügen:



d) weitere 9 (gelbe) Steine hinzufügen:



e) usw., ... bis folgendes Gebilde erzeugt ist:



f) Überzeugen Sie sich, dass damit insgesamt $3 \cdot S(7)$ Steine verbaut sind!

g) Welche Länge hat dieses Gebilde?

h) Betrachten Sie die Längen und summieren sie alle diese Reihen auf.

i) Sie sollten folgenden Zusammenhang erhalten:

$$3 \cdot S(7) = \frac{7 \cdot (7+1)}{2} \cdot (2 \cdot 7 + 1)$$

und daraus

$$S(7) = \frac{7 \cdot (7+1) \cdot (2 \cdot 7 + 1)}{6}$$

2. Versuchen Sie nun obige Legospielerei zu verallgemeinern (beliebiges $n \in \mathbb{N}$) und beweisen sie die von Ihnen vermutete Formel für $S(n)$.

3. Wieviele Steine sind für eine Pyramide mit Seitenlänge 50 nötig?

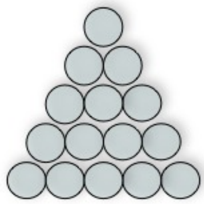
8. Aufgabe

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$.

Zeigen Sie, dass zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ aus $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind.

9. Aufgabe

Ein Trinker bekommt eine Lieferung von 1000 Weinflaschen. Da er auch eine gewisse Ästhetik besitzt, will er die Flaschen in Form einer Pyramide aufbauen. Beispiel mit 15 Flaschen:



Wieviele Flaschen muß er noch hinzukaufen, damit eine perfekte Pyramide entsteht und wieviele Flaschen muss er in die unterste Reihe legen?

10. Aufgabe

Betrachte folgendes Programmkonstrukt:

```
1      int n = 2000;
2          for (int i = 0; i < n; i++) {
3             for (j = 0; j < i; j++) {
4                  // wilde Rechnerei
5          }
6      }
```

Wir nehmen einfach an, dass zur Ausführung der Zeile 4 genau 10^{-3} sec benötigt werden und die anderen Programmzeilen vernachlässigbar sind.

Wie lange dauert die Durchführung des Programmsegmentes?

11. Aufgabe

1. Sehen Sie ruhig mal unter wikipedia nach, wie dort die Fakultät ($n!$) eingeführt wurde.

   Beurteilen Sie diese Art der Einführung.

2. Anbei zwei Formeln zur Abschätzung von $n!$

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$
$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} - \frac{139}{5140\,n^3}\right)$$

Wie man auf solche Formeln kommt, sei momentan dahingestellt.

Überprüfen Sie die Güte durch entsprechende Experimente mit Taschenrechner oder Computer!

12. Aufgabe

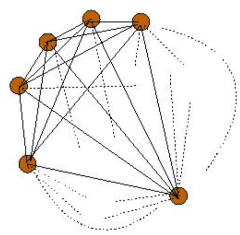
Berechne

1. $\binom{17}{4}$
2. $\binom{17}{13}$
3. $\binom{5}{3}$ aus Pascalschem Dreieck
4. $(a+b)^5$ als Summe von Binomen ausdrücken!
5. Zeigen Sie: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \ldots (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$$

6. Entwickeln Sie nach dem Vorbild des Pascalschen Dreieckes ein analoges Schema für die Stirlingzahlen $S_{n,k}$
7. Berechne $S_{8,3}$
8. Ein Gärtner hat 30 Pflöcke kreisförmig in die Erde gesteckt und jeden Pflock mit jedem anderen mit einer Schnur verbunden. Wieviele Seilstücke hat er benötigt?

   Versuch einer Graphik:



9. M sei Menge mit 5 Elementen. Wieviel verschiedene Zerlegungen von M gibt es?

13. Aufgabe

Zeigen Sie:

1.
$$n! \cdot \binom{r}{n} \leq r^n \quad \forall n, k \text{ mit } n \leq r$$

2.
$$r! \cdot S_{n,r} \leq r^n \quad \forall n, k \text{ mit } n \geq n$$

14. Aufgabe

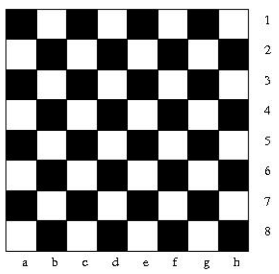
1. Beweisen sie (sofern noch nicht geschehen) die wichtige (!!) geometrische Summenformel:

   Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

   (nicht mehr vergessen!)

2. Für alle, die es nicht wissen: Ein Schachbrett besteht aus 8x8 Feldern:



   a) Auf a1 liegt ein Reiskorn, auf a2 liegen 2 Reiskörner ... auf b1 liegen 9 Reiskörner ...
   Wieviel Reiskörner liegen auf dem Brett?

   b) Auf a1 liegt ein Reiskorn. Jedes folgende Feld erhält doppelt soviele Reiskörner wie das vorhergehende. (Zeilenweise ...)
   Wieviel Reiskörner liegen auf dem Brett?